CCP PC 2019 - Corrigé

Corrigé proposé par M. Carrot

Exercice 1 : Polynôme de Laguerre et méthode de quadrature de Gauss

Partie I - Produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$

I.1 - Généralités

1. • $t \mapsto P(t)Q(t)e^{-t}$ est continue sur $[0,1]$, donc intégrable sur $[0,1]$.
   • $t \mapsto P(t)Q(t)e^{-t}$ est continue sur $[1,+\infty[$.
   $P(t)Q(t)e^{-t} = \underset{t\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$ par croissances comparées.
   Or $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ (Riemann et $2>1$), donc, par comparaison, $t \mapsto P(t)Q(t)e^{-t}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$.
   $t \mapsto P(t)Q(t)e^{-t}$ est donc intégrable sur $\mathbb{R}_+$, donc, en particulier, l'intégrale définissant $(P|Q)$ est convergente
2. • L'application $(.|.)$ est bien définie à valeurs dans $\mathbb{R}$.
   • Pour tout $(P,Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$,
   $$(P|Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt = \int_0^{+\infty} Q(t)P(t)e^{-t}dt = (Q|P),$$
   donc $(.|.)$ est symétrique.
   • Pour tout $(P,Q,R) \in \mathbb{R}_n[X]^3$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,
   $$\begin{aligned}(\lambda P + Q|R) &= \int_0^{+\infty} (\lambda P(t) + Q(t))R(t)e^{-t}dt \\ &= \lambda \int_0^{+\infty} P(t)R(t)e^{-t}dt + \int_0^{+\infty} Q(t)R(t)e^{-t}dt \quad \text{(par linéarité de l'intégrale convergente)} \\ &= \lambda(P|R) + (Q|R),\end{aligned}$$
   donc $(.|.)$ est linéaire à gauche.
   • $(.|.)$ est linéaire à gauche et symétrique, donc bilinéaire.
   • Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $P^2(t)e^{-t} \geq 0$.
   D'où, par positivité de l'intégrale (qui converge et "$+\infty > 0$"), on a :
   $$(P|P) = \int_0^{+\infty} P^2(t)e^{-t}dt \geq 0.$$
   $(.|.)$ est donc positif.
   • Enfin, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, si $(P|P) = 0$, alors $\int_0^{+\infty} P^2(t)e^{-t}dt = 0$.
   Or $t \mapsto P^2(t)e^{-t}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}_+$, "$0 < +\infty$" et $\int_0^{+\infty} P^2(t)e^{-t}dt$ converge, donc pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $P^2(t)e^{-t} = 0$, et donc $P^2(t) = 0$, puis $P(t) = 0$.
   Le polynôme P a donc une infinité de racines (tous les éléments de $\mathbb{R}_+$), donc $P = 0$.
   $(.|.)$ est donc bien défini.
   • $(.|.)$ définit donc bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

I.2 - Calcul d'un produit scalaire

3. Posons $u(t) = t^k$, $u'(t) = kt^{k-1}$, $v'(t) = e^{-t}$, $v(t) = -e^{-t}$.
   u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$.
   $u(t)v(t) = -t^k e^{-t} \underset{t\to+\infty}{\rightarrow} 0$ par croissances comparées.
   Enfin, les deux intégrales $\int_0^{+\infty} u(t)v'(t)dt$ et $\int_0^{+\infty} u'(t)v(t)dt$ sont convergentes.
   On peut donc intégrer par parties et on a :
   $$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} t^k e^{-t}dt &= [-t^k e^{-t}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} kt^{k-1}e^{-t}dt \\ &= 0 + k\int_0^{+\infty} t^{k-1}e^{-t}dt.\end{aligned}$$

4. Montrons par récurrence que, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $(X^k|1) = k!$ (HR_k)

Initialisation : Pour $k=0$, $(X^0|1) = (1|1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}dt = 1$ (cours), donc on a bien HR_0.

Hérédité : Soit $k \in [\![0,n-1]\!]$ et supposons HR_k vérifiée.
Alors, d'après la question précédente, comme $k+1 \in [\![1,n]\!]$, on a

$$(X^{k+1}|1) = \int_0^{+\infty} t^{k+1}e^{-t}dt = (k+1)\int_0^{+\infty} t^k e^{-t}dt = (k+1)(X^k|1) \underset{HR_k}{=} (k+1)k! = (k+1)!.$$

On a bien HR_{k+1}.

Conclusion : D'où, par récurrence, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $(X^k|1) = k!$.

Partie II - Construction d'une base orthogonale

II.1 - Propriétés de l'application α

5. • Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\alpha(P) = XP'' + (1-X)P'$ est un polynôme.
De plus, comme $\deg(P') \leq \deg(P) - 1 \leq n-1$ et $\deg(P'') \leq n-2$, on a

$$\deg(\alpha(P)) \leq \max(\deg(XP''), \deg((1-X)P')) \leq \max(1+n-2, 1+n-1) \leq n,$$

donc $\alpha(P) \in \mathbb{R}_n[X]$. On a donc $\alpha : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$.
• De plus, pour tout $(P,Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\alpha(\lambda P + Q) &= X(\lambda P + Q)'' + (1-X)(\lambda P + Q)' \\ &= X(\lambda P'' + Q'') + (1-X)(\lambda P' + Q') \quad \text{(par linéarité de la dérivation)} \\ &= \lambda XP'' + XQ'' + \lambda(1-X)P' + (1-X)Q' = \lambda(XP'' + (1-X)P') + (XQ'' + (1-X)Q') \\ &= \lambda\alpha(P) + \alpha(Q),\end{aligned}$$

donc α est une application linéaire.
• α est donc bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

6. On a $\alpha(1) = X(1)'' + (1-X)(1)' = 0$, $\alpha(X) = X(X)'' + (1-X)(X)' = 1-X$ et, pour tout $k \in [\![2,n]\!]$,

$$\alpha(X^k) = X(X^k)'' + (1-X)(X^k)' = Xk(k-1)X^{k-2} + (1-X)kX^{k-1} = -kX^k + k^2X^{k-1}.$$

Rq : On remarque que cette formule est encore valable pour $k=1$, donc on a,

$$\boxed{\forall k \in [\![1,n]\!],\ \alpha(X^k) = -kX^k + k^2X^{k-1} \quad et \quad \alpha(1) = 0.}$$

On a donc

$$Mat_{(1,X,\ldots,X^n)}(\alpha) = Mat_{(1,\ldots,X^n)}(\alpha(1),\ldots,\alpha(X^n)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & -(n-1) & n^2 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -n \end{pmatrix}.$$

7. Comme $Mat_{(1,X,\ldots,X^n)}(\alpha)$ est triangulaire supérieure, son spectre se lit sur la diagonale. On a donc

$$\mathrm{Sp}(\alpha) = \mathrm{Sp}\left(Mat_{(1,X,\ldots,X^n)}(\alpha)\right) = \{-k | k \in [\![0,n]\!]\}.$$

II.Vecteurs propres de l'application α

On fixe un entier $k \in [\![0,n]\!]$.

8. Comme α est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ ayant $n+1$ valeurs propres, toutes ces valeurs propres sont simples.
$-k$ est donc valeur propre simple de α, donc $\dim E_{-k}(\alpha) = \dim(\ker(\alpha + k\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[X]})) = 1$.

9. • Soit (Q_k) une base de $\ker(\alpha + k\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[X]})$ avec $Q_k \neq 0$.
Notons a le coefficient dominant de Q_k (non nul car $Q_k \neq 0$).
Alors $P_k = \dfrac{1}{a}Q_k$ est un polynôme ayant un coefficient dominant égal à 1.
De plus, $P_k = \dfrac{1}{a}Q_k \in \mathrm{Vect}(Q_k) = \ker(\alpha + k\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[X]})$, donc

$$(\alpha + k\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[X]})(P_k) = 0 \Leftrightarrow \alpha(P_k) + kP_k = 0 \Leftrightarrow \alpha(P_k) = -kP_k.$$

Il existe donc bien un polynôme $P_k \in \mathbb{R}_n[X]$, de coefficient dominant égal à 1, vérifiant $\alpha(P_k) = -kP_k$.
• Supposons qu'il existe un autre polynôme $R_k \in \mathbb{R}_n[X]$, de coefficient dominant égal à 1, vérifiant $\alpha(P_k) = -kP_k$.

Alors $R_k \in \ker(\alpha + k\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[X]}) = \mathrm{Vect}(Q_k) = \mathrm{Vect}\left(\frac{1}{a}Q_k\right) = \mathrm{Vect}(P_k)$, donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $R_k = \lambda P_k$.
De plus, les deux polynômes P_k et R_k ont le même coefficient dominant (1), donc $\lambda = 1$, et, par suite, $R_k = P_k$. On a donc bien l'unicité.
• Il existe donc bien un unique polynôme $P_k \in \mathbb{R}_n[X]$, de coefficient dominant égal à 1, vérifiant $\alpha(P_k) = -kP_k$.

10. Soit d le degré de P_k, avec $d \in [\![0, n]\!]$ car P_k est non nul et $P_k \in \mathbb{R}_n[X]$.

Il existe donc $(a_0, \ldots, a_d) \in \mathbb{R}^{d+1}$ tels que $P_k = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i$ (et $a_d = 1$).

Alors on a :

$$\begin{aligned}\alpha(P_k) &= \sum_{i=0}^{d} a_i \alpha(X^i) \quad \text{(par linéarité de } \alpha) \\ &= 0 + \sum_{i=1}^{d} a_i \left(-iX^i + i^2 X^{i-1}\right) \quad \text{(d'après la question 6)} \\ &= \sum_{i=1}^{d} -ia_i X^i + \sum_{i=0}^{d} a_i i^2 X^{i-1}.\end{aligned}$$

Comme on a par ailleurs $\alpha(P_k) = -kP_k$ (car $P_k \in \ker(\alpha + k\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[X]})$), on obtient, en identifiant les coefficients dominants :

$$-da_d = -ka_d \underset{a_d=1}{\Leftrightarrow} -d = -k \Leftrightarrow d = k,$$

donc P_k est de degré k.

11. • On a $\alpha(1) = 0 = -0(1)$ et le coefficient dominant de 1 est 1, donc, par unicité de P_0, on a $P_0 = 1$.
• On a $\alpha(X) = -X + 1$, donc $\alpha(X - 1) = \alpha(X) - \alpha(1) = -X + 1 + 0 = -(X - 1)$, et le coefficient dominant de $X - 1$ est 1, donc, par unicité de P_1, on a $P_1 = X - 1$.
• Le coefficient dominant de $X^2 - 4X + 2$ est 1 et

$$\alpha(X^2 - 4X + 2) = \alpha(X^2) - 4\alpha(X) + 2\alpha(1) = -2X^2 + 4X - 4(-X + 1) + 0 = -2X^2 + 8X - 4 = -2(X^2 - 4X + 2),$$

donc, par unicité de P_2, on a $P_2 = X^2 - 4X + 2$.

II.3 - Orthogonalité de la famille $(P_0, \ldots, P_n)$

Soit $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$.

12. • Par linéarité de l'intégrale convergente,

$$(\alpha(P)|Q) = \int_0^{+\infty} (tP''(t) + (1 - t)P'(t))Q(t)e^{-t}dt = \int_0^{+\infty} (tP''(t) + P'(t))Q(t)e^{-t} - \int_0^{+\infty} tP'(t)Q(t)e^{-t}dt,$$

où toutes ces intégrales convergent d'après la question 1.
• Posons $u'(t) = tP''(t) + P'(t)$, $u(t) = tP'(t)$, $v(t) = Q(t)e^{-t}$, $v'(t) = Q'(t)e^{-t} - Q(t)e^{-t}$.
u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.
$u(t)v(t) = tP'(t)Q(t)e^{-t} \underset{t \to +\infty}{\to} 0$ par croissances comparées.
Enfin, toutes les intégrales convergent (toujours d'après la question 1).
On peut donc intégrer par parties et on a :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} (tP''(t) + P'(t))Q(t)e^{-t}dt &= \left[tP'(t)Q(t)e^{-t}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} tP'(t)(Q'(t)e^{-t} - Q(t)e^{-t})dt \\ &= 0 - 0 - \int_0^{+\infty} tP'(t)Q'(t)e^{-t}dt + \int_0^{+\infty} tP'(t)Q(t)e^{-t}dt \quad \text{(par linéarité de l'intégrale)},\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}(\alpha(P)|Q) &= \int_0^{+\infty} (tP''(t) + P'(t))Q(t)e^{-t} - \int_0^{+\infty} tP'(t)Q(t)e^{-t}dt \\ &= -\int_0^{+\infty} tP'(t)Q'(t)e^{-t}dt.\end{aligned}$$

13. Par symétrie des rôles de P et Q, on a aussi

$$(\alpha(Q)|P) = -\int_0^{+\infty} tQ'(t)P'(t)e^{-t}dt = -\int_0^{+\infty} tP'(t)Q'(t)e^{-t}dt,$$

donc, par symétrie du produit scalaire,

$$(\alpha(P)|Q) = -\int_0^{+\infty} tP'(t)Q'(t)e^{-t}dt = (\alpha(Q)|P) = (P|\alpha(Q)).$$

14. • Pour tout $(i,j) \in [\![0,n]\!]^2$,

$$(\alpha(P_i)|P_j) = (-iP_i|P_j) = -i(P_i|P_j)$$
$$\text{et}\quad (\alpha(P_i)|P_j) = (P_i|\alpha(P_j)) = (P_i| - jP_j) = -j(P_i|P_j),$$

donc, d'après la question 13, $-i(P_i|P_j) = -j(P_i|P_j)$, donc $(i-j)(P_i|P_j) = 0$, donc, si $i \neq j$, on a $(P_i|P_j) = 0$.
La famille $(P_0, \dots, P_n)$ est donc orthogonale.
• De plus, elle est composée de vecteurs non nuls (car le coefficient dominant de ces polynômes vaut 1), donc cette famille est libre.
Comme elle est libre et composée de $n+1$ polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$, espace vectoriel de dimension $n+1$, c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
• La famille $(P_0, \dots, P_n)$ est donc bien une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.

Partie III - Méthode de quadrature de Gauss

15. Remarquons déjà que, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^k e^{-t}dt = (1|X^k) = k!$ d'après la question 4.
$\boxed{\Rightarrow}$ Si un n-uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ vérifie $(*)$, alors pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, en posant $P(X) = X^k \in \mathbb{R}_n[X]$, on doit avoir

$$\int_0^{+\infty} t^k e^{-t}dt = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^k, \quad \text{ie} \quad k! = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^k.$$

Le n-uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ vérifie donc bien :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0! \\ 1! \\ \vdots \\ (n-1)! \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Réciproquement, si n-uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ vérifie

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0! \\ 1! \\ \vdots \\ (n-1)! \end{pmatrix},$$

alors pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, la ligne k de ce système donne $\displaystyle\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^k = k! = \int_0^{+\infty} t^k e^{-t}dt$.

D'où, pour tout polynôme $P = \displaystyle\sum_{k=0}^n a_k X^k$,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \lambda_i P(x_i) &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=0}^n \lambda_i a_k x_i^k = \sum_{k=0}^n a_k \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^k \\ &= \sum_{k=0}^n a_k \int_0^{+\infty} t^k e^{-t}dt = \int_0^{+\infty} \sum_{k=0}^n a_k t^k e^{-t}dt \quad \text{(par linéarité de l'intégrale)} \\ &= \int_0^{+\infty} P(t)e^{-t}dt. \end{aligned}$$

On a donc bien $(*)$.

16. La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$ est une matrice de Van der Monde, donc inversible car les x_i sont deux à deux distincts.
Le système $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0! \\ 1! \\ \vdots \\ (n-1)! \end{pmatrix}$ est donc de Cramer, donc il admet un unique n-uplet solution. D'où l'unicité de $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ vérifiant $(*)$.

17. • Soit $P = P_n^2$. Alors $\deg(P) = 2\deg(P_n) = 2n$, donc $P \in \mathbb{R}_{2n}[X]$.
• De plus, $t \mapsto P(t)e^{-t} = P_n^2(t)e^{-t}$ est continue, positive et non nulle sur $\mathbb{R}_+^*$ (car P_n, non nul, n'a pas une infinité de

racines), donc, par stricte positivité de l'intégrale ("$0 < +\infty$"), $\displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)e^{-t}dt > 0$.

• Enfin, comme x_i est racine de P_n pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, x_i est aussi racine de $P = P_n^2$, donc $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i P(x_i) = \sum_{i=1}^{n} 0 = 0$, donc on a bien

$$\int_0^{+\infty} P(t)e^{-t}dt \neq 0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P(x_i).$$